ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в магистратуру

1. 3 Вычислить интеграл
$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}\,.$$

2. 3 Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\,.$$

3. 3 Найти максимальную кривизну кривой
$$\{\ \vec{r}(t) = (\sin t,\, \cos t,\, t)\ :\ \ t\in\mathbb{R}\ \}\,.$$
Система координат декартова прямоугольная.

4. 4 Решить задачу Коши
$$x^2y''(x) = 2y(x),\quad x>0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=3.$$

5. 5 Вычислить массу поверхности
$$S=\left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ \ z=x^2+y^2\le 2x\ \right\}\quad \text{с поверхностной плотностью}\quad \rho=\frac{z}{\sqrt{1+4z}}.$$
Система координат декартова прямоугольная.

6. 5 Вычислить интеграл
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x-i}\right)^2 dx\,.$$

7. 7 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,2]$. Случайная величина Y имеет плотность распределения
$$\rho(t)=\begin{cases} 0, & t<1,\\ \frac{3}{t^4}, & t\ge 1.\end{cases}$$

а) 3 Найти функцию распределения случайной величины $Z=XY$.

б) 2 Вычислить математическое ожидание случайной величины Z.

в) 2 Вычислить дисперсию случайной величины Z.

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1.(3) Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}\,.$$

Ответ: $3\ln(2)-\frac{3}{2}$.

2.(3) Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\,.$$

Ответ: $\exp\left(-\frac{1}{3}\right)$.

3.(3) Найти максимальную кривизну кривой

$$\{\ \vec{r}(t)=(\sin t,\,\cos t,\,t)\ :\ t\in\mathbb{R}\ \}\,.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $k(t)=\frac{\sqrt{2-\sin(2t)}}{2\sqrt{2}}$, $\quad k_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

4.(4) Решить задачу Коши

$$x^2y''(x)=2y(x),\quad x>0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=3.$$

Ответ: $y(x)=x^2-\frac{1}{x}$.

5.(5) Вычислить массу поверхности

$$S=\left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z=x^2+y^2\le 2x\ \right\}\quad \text{с поверхностной плотностью}\quad \rho=\frac{z}{\sqrt{1+4z}}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Имеем $dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+4z}\,dx\,dy$, поэтому $\rho\,dS=z\,dx\,dy$, и в полярных координатах $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ получаем:

$$\int_S\rho\,dS=\iint_{x^2+y^2\le 2x}z\,dx\,dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3\,dr=8\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{3\pi}{2}.$$

6.(5) Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x-i}\right)^2\,dx\,.$$

Ответ: $-\frac{\pi i}{2e}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x-i}\right)^2 dx = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2(x-i)^2}}_{=0} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{2(x-i)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x-i)^2}\,dx - -\frac{1}{4i}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix}}{(x-i)^2}\,dx}_{=0} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{4i}\,\frac{d}{dx}e^{ix}\Big|_{x=i} = -\frac{\pi i}{2e}.$$

7. 7 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,2]$. Случайная величина Y имеет плотность распределения

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \frac{3}{t^4}, & t \geq 1. \end{cases}$$

а) 3 Найти функцию распределения случайной величины $Z = XY$.

б) 2 Вычислить математическое ожидание случайной величины Z.

в) 2 Вычислить дисперсию случайной величины Z.

Ответ: $P(Z<t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{3t}{8}, & 0 < t < 2, \\ 1-\frac{2}{t^3}, & t \geq 2. \end{cases} \qquad MZ = \frac{3}{2}, \qquad DZ = \frac{7}{4}.$

$$P(Z<t) = \iint\limits_{\substack{0<\xi<2 \\ \eta>1, \\ \xi\eta<t}} \frac{3\,d\xi\,d\eta}{2\eta^4} = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \int\limits_0^t \frac{d\xi}{2}\int\limits_1^{\frac{t}{\xi}}\frac{3d\eta}{\eta^4} = \frac{3t}{8}, & 0 < t < 2, \\ \int\limits_0^2 \frac{d\xi}{2}\int\limits_1^{\frac{t}{\xi}}\frac{3d\eta}{\eta^4} = 1-\frac{2}{t^3}, & t \geq 2. \end{cases}$$

Плотность распределения случайной величины Z равна $\rho_Z(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{3}{8}, & 0 < t < 2, \\ \frac{6}{t^4}, & t \geq 2. \end{cases}$

$$MZ = \int\limits_0^2 \frac{3}{8}\,t\,dt + \int\limits_2^{+\infty}\frac{6}{t^3}\,dt = \frac{3}{2},$$

$$DZ = MZ^2 - (MZ)^2 = \int\limits_0^2 \frac{3}{8}t^2\,dt + \int\limits_2^{+\infty}\frac{6}{t^2}\,dt - \frac{9}{4} = 1 + 3 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}.$$